JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY **21**, 246–256 (1977)

Ein Störungssatz zur rationalen Tschebyscheff-Approximation über $[0, \infty]$

HANS-PETER BLATT

*Fakultät für Mathematik und Informatik der Universität Mannheim (WH), A 5
6800 Mannheim, West Germany*

Communicated by G. Meinardus

Received February 4, 1976

1. EINLEITUNG

Π_m sei die Menge der reellen Polynome vom Grad $\leqslant m$ und

$$\Pi_{m,n} := \{r_{m,n} = p_m/q_n ; p_m \in \Pi_m , q_n \in \Pi_n\}.$$

Wir bezeichnen mit $\|\cdot\|_{[a,b]}$ die Tschebyscheff-Norm über einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ der erweiterten reellen Zahlen $\overline{\mathbb{R}}$.

In den letzten Jahren wurde versucht, Beziehungen zwischen Holomorphieeigenschaften einer Funktion f und der geometrischen Konvergenz der Minimalabweichungen

$$\lambda_{m,n} := \inf_{r_{m,n}\in\Pi_{m,n}} \|1/f - r_{m,n}\|_{[0,\infty]}$$

herzuleiten. Man betrachtet dazu zu reellem $r > 0$ und $s > 1$ die abgeschlossene Ellipse $\mathfrak{E}(r, s)$ der komplexen Ebene mit Brennpunkten in 0 und r und der Summe $r \cdot s$ beider Achsen. Für eine ganze Funktion f definieren wir

$$M_f(r, s) := \max_{z\in\mathfrak{E}(r,s)} |f(z)|.$$

Wir sagen, f habe *geometrische Konvergenz*, wenn

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (\lambda_{0,n})^{1/n} < 1.$$

Meinardus, Reddy, Taylor und Varga [3, 4] bewiesen.

SATZ 1 [4]. *Sei $f(x)$ eine reelle, stetige Funktion über $[0, \infty)$ und f habe geometrische Konvergenz. Dann ist f Restriktion einer ganzen Funktion von endlicher Ordnung. Außerdem gibt es für jedes $s > 1$ positive Konstanten $K(s)$, $\theta(s)$ und $r(s)$ mit*

$$M_f(r, s) \leqslant K(s)(\|f\|_{[0,r]})^{\theta(s)}$$

für alle $r \geqslant r(s)$.

ISSN 0021-9045

Eine hinreichende Bedingung für geometrische Konvergenz ergibt sich aus

SATZ 2 [1]. *$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ sei eine ganze transzendente Funktion mit reellen Koeffizienten und $a_{\nu_0} > 0$, $a_\nu \geqslant 0$ für $\nu \geqslant \nu_0$. Gibt es nun reelle Zahlen $s > 1$, $K > 0$, $\theta > 0$ und $r_0 > 0$ mit*

$$M_f(r, s) \leqslant K(\|f\|_{[0,r]})^\theta \qquad \text{für alle } r \geqslant r_0,$$

dann besitzt f geometrische Konvergenz.

Die in diesem Satz angegebene hinreichende Bedingung ist schwächer als die in [4] verlangte, wo alle Taylorkoeffizienten nicht negativ sein mußten. Den Beweis von Satz 2 kann man wie in [1] direkt führen oder den folgenden Störungssatz von Roulier und Taylor [5] heranziehen.

SATZ 3 [5]. *Sei f eine ganze Funktion mit nur endlich vielen Nullstellen in $[0, \infty)$. Es gebe Zahlen $s > 1$, $K > 0$, $\theta > 0$ und $r_0 > 0$ mit*

$$M_f(r, s) \leqslant K \cdot (\|f\|_{[0,r]})^\theta \qquad \text{für alle } r \geqslant r_0$$

und ganze Funktionen f_1 und f_2 mit den Eigenschaften:

$$f = f_1 + f_2, \tag{1}$$

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \qquad \text{mit } a_\nu \geqslant 0 \text{ für } \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

und f_1 habe geometrische Konvergenz, (2)

es existiert ein $B > 0$ mit $f_2(x) \geqslant -B$ für alle $x \geqslant 0$, (3)

es existieren Zahlen $r_1 > 0$, $\Psi > 0$ und $A > 0$ mit

$$f_2(x) \leqslant A[f_1(x)]^\Psi \text{ für alle } x \geqslant r_1, \tag{4}$$

es gibt eine Folge von positiven Zahlen $\{n_j\}$, für die $1 < n_{j+1}/n_j \leqslant \rho$ mit einer festen Zahl ρ gilt und außerdem $f_2^{(n_j+1)}(x) \leqslant 0$ für alle $x \geqslant 0$ und $j = 1, 2, \ldots.$ (5)

Dann besitzt f geometrishe Konvergenz.

Durch diesen Störungssatz wird die Kluft zwischen notwendigen und hinreichenden Bedingungen für geometrische Konvergenz zwar gemildert, andererseits kann dieser Satz wegen der Voraussetzung (2) nicht mehrmals hintereinander angewendet werden. So konnten Roulier und Taylor damit die geometrische Konvergenz für $f(x) = e^x + a \cdot e^{-x}$ für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ nachweisen, jedoch nicht die geometrische Konvergenz von $e^x + a \cdot \cos x$. In dieser Arbeit wird daher eine Version eines Störungssatzes dargestellt, die diesen Nachteil nicht hat.

2. Der Störungssatz

Zur Vereinfachung vereinbaren wir: Sei

$$0 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_L < \infty$$

mit zugeordneten ganzen, nichtnegativen Zahlen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_L$. Wir setzen

$$\beta := \sum_{i=1}^{L} \beta_i \qquad \text{und} \qquad w(x) := \prod_{i=1}^{L} (x - x_i)^{\beta_i}.$$

Weiter sei

$$N := \left\{ h(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \;\middle|\; \begin{array}{l} h \text{ ganz}, a_\nu \in \mathbb{R}, h \text{ hat in } [0, \infty) \\ \text{genau bei } x_i \text{ Nullstellen der} \\ \text{Ordnung } \beta_i \ (1 \leq i \leq L), \lim_{x \to \infty} h(x) = \infty \end{array} \right\},$$

$$\tilde{N} := \left\{ h(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \;\middle|\; \begin{array}{l} h \text{ ganz}, h \not\equiv 0, a_\nu \in \mathbb{R}, \text{ hat} \\ \text{bei } x_i \text{ Nullstellen der Ordnung} \\ \geq \beta_i \ (1 \leq i \leq L) \end{array} \right\}.$$

Ist $h \in \tilde{N}$, so bezeichnen wir mit $\hat{h}$ die ganze Funktion $\hat{h} := h/w$.

Satz 4. *Sei $f \in N$ und transzendent. Es gebe für jedes $s > 1$ Konstanten $K(s) > 0$, $\theta(s) > 0$ und $r(s) > 0$ mit*

$$M_f(r, s) \leq K(s) \cdot (\|f\|_{[0,r]})^{\theta(s)} \qquad \textit{für alle } r \geq r(s).$$

Außerdem gebe es ganze Funktionen $f_1, f_2 \in \tilde{N}$ mit dem Eigenschaften (1), (3)–(5). *Weiter gelte:*

$$\begin{array}{l} f_1 \textit{ hat geometrische Konvsrgenz und es gibt ein} \\ r_0 > 0, \textit{ so daß } f_1 \textit{ für } x \geq r_0 \textit{ monoton wächst.} \end{array} \tag{6}$$

Dann besitzt f geometrische Konvergenz.

Zum Beweis benötigen wir einige Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Ist $h \in N$, $h_1 \in \tilde{N}$, $r > 0$, $\tilde{\gamma} > 0$ und $|h(x)| \geq \tilde{\gamma}\,|h_1(x)|$ für $x \geq r$, dann gibt es eine Konstante $\gamma > 0$ mit*

$$|h(x)| \geq \gamma \cdot |h_1(x)| \qquad \textit{für alle } x \in [0, \infty).$$

Beweis. Da $h \in N$, *ist* $\hat{h}(x) > 0$ in $[0, r]$. Also ist

$$\gamma_1 := \min_{x \in [0,r]} \hat{h}(x) > 0.$$

Setzen wir

$$\gamma_2 := \max_{x\in[0,r]} |\hat{h}_1(x)|, \qquad \text{so gilt für } x \in [0, r]\text{: } |h(x)| \geqslant (\gamma_1/\gamma_2)\,|h_1(x)|.$$

HILFSSATZ 2. *Seien $f \in N$, $f_1 \in \tilde{N}$, $r > 0$, $\tilde{\gamma} > 0$, $\{q_n\}$ eine Folge in N und $\{q_{1,n}\}$ eine Folge in $\tilde{N}$ mit $|q_n(x)| \geqslant \tilde{\gamma}\,|q_{1,n}(x)|$ für alle $x \geqslant r$ und alle n. Außerdem sei $\lim_{n\to\infty} \|\hat{f} - \hat{q}_n\|_{[0,r]} = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \|\hat{f}_1 - \hat{q}_{1,n}\|_{[0,r]} = 0$. Dann gibt es eine Konstante $\gamma > 0$ mit $|q_n(x)| \geqslant \gamma\,|q_{1,n}(x)|$ für alle $x \in [0, \infty)$ und alle n.*

Beweis. Wir setzen

$$\alpha_1 := \min_{x\in[0,r]} \hat{f}(x), \qquad \alpha_2 := \max_{x\in[0,r]} |\hat{f}_1(x)|,$$

Dann ist $\alpha_1 > 0$, und wir können ein n_0 so wählen, daß

$$\hat{q}_n(x) \geqslant \alpha_1/2 \qquad \text{und} \qquad |\hat{q}_{1,n}(x)| \leqslant 2\alpha_2$$

für alle $n > n_0$ und alle $x \in [0, r]$ gilt. Damit ergibt sich für alle $x \in [0, \infty)$ und $n > n_0$:

$$|q_n(x)| \geqslant \min(\tilde{\gamma}, \tfrac{1}{4}\alpha_1\alpha_2^{-1})\,|q_{1,n}(x)|$$

Nach Hilfssatz 1 gibt es außerdem positive Zahlen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n_0}$ mit $|q_n(x)| \geqslant \gamma_n\,|q_{1,n}(x)|$ für $x \in [0, \infty)$ und $n = 1, 2, \ldots, n_0$. Die Zahl $\gamma = \min(\tilde{\gamma}, \tfrac{1}{4}\alpha_1\alpha_2^{-1}, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n_0})$ erfüllt somit unsere Behauptung.

Außerdem beweist man mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel.

HILFSSATZ 3. *Sei h eine ganze, transzendente Funktion, p ein Polynom, $s > 1$. Dann gibt es ein $r^* > 0$, so daß für alle $r \geqslant r^*$ die Ungleichung*

$$M_p(r, s) \leqslant M_h(r, s)$$

erfüllt ist.

Beweis von Satz 4. f_1 hat endlich viele Nullstellen, die wir mit

$$0 \leqslant y_1 < y_2 < \cdots < y_d < \infty$$

bezeichnen und entsprechenden Ordnungen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d$. Unter diesen y_i kommen wegen $f_1 \in \tilde{N}$ die Stellen x_i mit der Ordnung $\geqslant \beta_i$ vor. Wir definieren

$$w_1(x) := \prod_{i=1}^{d} (x - y_i)^{\alpha_i} \qquad \text{und} \qquad \alpha := \sum_{i=1}^{d} \alpha_i\,. \tag{7}$$

Mit $\tilde{p}_1$ bezeichnen wir das Polynom aus $\Pi_{2\alpha-1}$ mit

$$\tilde{p}_1^{(j)}(y_i) = f_1^{(j)}(y_i)$$

für $j = 0, 1, \ldots, 2\alpha_i - 1$ und $i = 1, 2, \ldots, d$; außerdem sei

$$\frac{1}{q_{1,n}} = \frac{1}{\tilde{p}_1 + w_1^2 p_{1,n}}$$

die Minimallösung zu $1/f_1$ bezüglich V_n über $[0, \infty]$. Eine solche existiert in jedem Fall für $n \geqslant 3\alpha$ und wir definieren

$$\left\| \frac{1}{f_1} - \frac{1}{q_{1,n}} \right\|_{[0,\infty]} = E_{1,n}.$$

Weiter bestimmen wir $\tilde{p}_2 \in \Pi_{3\beta-1}$ durch

$$\tilde{p}_2^{(j)}(x_i) = f_2^{(j)}(x_i)$$

für $j = 0, 1, \ldots, 3\beta_i - 1$ und $i = 1, 2, \ldots, L$. Dann gilt

$$f_2 - \tilde{p}_2 = w^3 F_2$$

mit einer ganzen Funktion F_2.

Mit $p_{2,n} \in \Pi_{n-3\beta}$ bezeichnen wir für $n \geqslant 3\beta$ das Minimalpolynom zu F_2 über $[0, r]$ und setzen

$$\| F_2 - p_{2,n} \|_{[0,r]} =: E_{2,n}(r).$$

Wir betrachten jetzt

$$q_n = q_{1,n} + q_{2,n} \tag{8}$$

mit

$$q_{2,n} = \tilde{p}_2 + w^3(p_{2,n} + E_{2,n}(r)) \tag{9}$$

und wollen zeigen, daß wir mit den Polynomen $q_n \in \Pi_n$ die geometrische Konvergenz erreichen. Für $x \geqslant y_d$ gilt

$$\frac{1}{q_{1,n}(x)} \leqslant \frac{1}{f_1(x)} + E_{1,n},$$

also gibt es, da $\lim_{n\to\infty} E_{1,n} = 0$ ist, und f_1 für $x \geqslant r_0$ monoton wächst, ein $n^* \in \mathbb{N}$ und ein $r_2 > \max(r_0, y_d)$ mit

$$\frac{B}{q_{1,n}(x)} \leqslant \tfrac{1}{2} \qquad \text{für } x \geqslant r_2 \text{ und } n \geqslant n^* \ (B \text{ wie in } (3)). \tag{10}$$

Dieses r_2 können wir noch so wählen, daß zusätzlich

$$f(x) \geqslant \tfrac{1}{2} f_1(x) \qquad \text{für alle } x \geqslant r_2 \text{ erfüllt ist.} \tag{11}$$

Im folgenden sei stets $r \geqslant r_2$. Da $q_n \in \tilde{N}$ ist, gilt $q_n = w \cdot \hat{q}_n$. Wir definieren ein Polynom Q_n durch

$$q_n = w(Q_n + w^2 E_{2,n}(r))$$

und erhalten für $x \in [0, r_2]$ und $n \geqslant 3\alpha$;

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(x) - Q_n(x)| &= \left| \frac{1}{w(x)} (f_1(x) + f_2(x) - q_{1,n}(x) - \tilde{p}_2(x) - w^3(x)\, p_{2,n}(x)) \right| \\
&\leqslant \left| \frac{f_1(x) - q_{1,n}(x)}{w(x) \hat{f}_1(x)\, q_{1,n}(x)} \right| |\hat{f}_1(x)\, q_{1,n}(x)| \\
&\quad + \left| \frac{f_2(x) - \tilde{p}_2(x) - w^3(x)\, p_{2,n}(x)}{w^3(x)} \right| w^2(x) \\
&\leqslant K_1 E_{1,n} + w^2(x)\, E_{2,n}(r).
\end{aligned}$$

Dabei ist K_1 eine Konstante, die sich aus der Beschränktheit von $\| q_{1,n} \|_{[0,r_2]}$ für $n \geqslant 3\alpha$ ergibt. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\hat{q}_n(x) &= Q_n(x) + w^2(x) E_{2,n}(r) \\
&\geqslant \hat{f}(x) - |\hat{f}(x) - Q_n(x)| + w^2(x) E_{2,n}(r) \\
&\geqslant \hat{f}(x) - K_1 E_{1,n}.
\end{aligned}$$

Also gibt es ein $n^{**} \in \mathbb{N}$ mit

$$\hat{q}_n(x) \geqslant \tfrac{1}{2} \hat{f}(x) \qquad \text{für alle } x \in [0, r_2] \text{ und alle } n \geqslant n^{**}. \tag{12}$$

Jetzt ist aber $\tilde{p}_2 + w^3 p_{2,n}$ Hermite-Interpolationspolynom zu f_2 auf einer gewissen Punktmenge in $[0, r]$. Also folgt aus (5) für $x \geqslant r$ und $n = n_j$:

$$f_2(x) \leqslant \tilde{p}_2(x) + w^3(x) p_{2,n}(x) \leqslant q_{2,n}(x).$$

Wählen wir j_0 so, daß $n_{j_0} \geqslant \max(n^*, n^{**})$, dann gilt mit (10)

$$\begin{aligned}
q_n(x) &= q_{1,n}(x) \left(1 + \frac{q_{2,n}(x)}{q_{1,n}(x)}\right) \geqslant q_{1,n}(x) \left(1 - \frac{B}{q_{1,n}(x)}\right) \\
&\geqslant \tfrac{1}{2} q_{1,n}(x)
\end{aligned} \tag{13}$$

für $n = n_j$ mit $j \geqslant j_0$ und $x \geqslant r$ mit $r \geqslant r_2$. Für $x \in [r_2, r]$ ist wegen $q_{2,n}(x) \geqslant -B$ und (10) ebenfalls

$$q_n(x) \geqslant \tfrac{1}{2} q_{1,n}(x) \qquad \text{für alle } n \geqslant n^*. \tag{14}$$

Aus (12)–(14) ergibt sich, daß $q_n \in N$ für $n = n_j$ mit $j \geqslant j_0$. Insbesondere gilt für $x \in [r, \infty]$ mit $r \geqslant r_2$ und $n = n_j$ mit $j \geqslant j_0$:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{q_n(x)}\right| &\leqslant \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{q_n(x)} \leqslant \frac{2}{f_1(r)} + \frac{2}{q_{1,n}(x)} \\ &\leqslant \frac{4}{f_1(r)} \leqslant 2E_{1,n}.\end{aligned} \tag{15}$$

Wir kommen nun zur Abschätzung in $[0, r]$ und gehen aus von

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{q_n(x)}\right| \leqslant \left|\frac{f_1(x) - q_{1,n}(x)}{f(x)\, q_n(x)}\right| + \left|\frac{f_2(x) - q_{2,n}(x)}{f(x)\, q_n(x)}\right|. \tag{16}$$

Wegen (11) gibt es nach Hilfssatz 1 ein $\gamma > 0$ mit $|f(x)| \geqslant \gamma\, |f_1(x)|$ für alle $x \in [0, \infty)$. Nun gibt es eine Konstante $K > 0$ mit

$$\|q_{1,n}\|_{[0,r_2]} \leqslant K \qquad \text{für alle } n \geqslant 3\alpha.$$

Also folgt aus

$$|\hat{q}_{1,n}(x) - \hat{f}_1(x)| \leqslant E_{1,n}\, |\hat{f}_1(x) q_{1,n}(x)|,$$

daß $\lim_{n\to\infty} \|\hat{q}_{1,n} - \hat{f}_1\|_{[0,r_2]} = 0$ ist. Weiterhin ist

$$\begin{aligned}\|\hat{f}_2 - \hat{q}_{2,n}\|_{[0,r_2]} &= \|w^2 F_2 - w^2(p_{2,n} + E_{2,n}(r))\|_{[0,r_2]} \\ &\leqslant \|w^2\|_{[0,r_2]} \cdot 2E_{2,n}(r)\end{aligned}$$

für $r \geqslant r_2$. Unter der Voraussetzung $\lim_{n\to\infty} E_{2,n}(r) = 0$ folgt damit $\lim_{n\to\infty} \|\hat{f} - \hat{q}_n\|_{[0,r_2]} = 0$ und so nach Hilfssatz 2 unter Beachtung von (13) und (14): Es gibt eine Konstante $\bar{\gamma} > 0$ mit

$$|q_n(x)| \geqslant \bar{\gamma}\, |q_{1,n}(x)|$$

für alle $x \in [0, \infty)$, wenn nur noch $n = n_j$ ($j \geqslant j_0$) und $r \geqslant r_2$ ist. Somit gilt unter diesen Einschränkungen

$$\left|\frac{f_1(x) - q_{1,n}(x)}{f(x)\, q_n(x)}\right| \leqslant \frac{1}{\gamma\bar{\gamma}} E_{1,n} \qquad \text{für } x \in [0, r] \tag{17}$$

und für $x \in [r_2, r]$

$$\begin{aligned}\left|\frac{f_2(x) - q_{2,n}(x)}{f(x)\, q_n(x)}\right| &= \left|\frac{w^3(x)(F_2(x) - p_{2,n}(x) - E_{2,n}(r))}{f(x)\, q_n(x)}\right| \\ &\leqslant \frac{2E_{2,n}(r)}{\bar{\gamma}} \left|\frac{w^3(x)}{f(x)}\right| \left|\frac{1}{q_{1,n}(x)}\right| \\ &\leqslant \frac{2E_{2,n}(r)}{\bar{\gamma}} \left|\frac{w^3(x)}{f(x)}\right| \left[\frac{1}{f_1(x)} + E_{1,n}\right].\end{aligned} \tag{18}$$

Da f_1 geometrische Konvergenz über $[0, \infty]$ besitzt, gibt es zu $s > 1$ Konstanten $\tilde{K} > 0$, $\tilde{r} \geqslant r_2$ und eine ganze Zahl $\tilde{\theta} > 1$ mit

$$M_{f_1}(x, s) \leqslant \tilde{K}(\| f_1 \|_{[0,x]})^{\tilde{\theta}} \qquad \text{für alle } x \geqslant \tilde{r}.$$

Außerdem wählen wir $\tilde{r}$ so, daß $| f_1(x)| = \| f_1 \|_{[0,x]}$ gilt für alle $x \geqslant \tilde{r}$. Damit ergibt sich wegen (11) für $x \geqslant \tilde{r}$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{w^3(x)}{f(x)} \right| &\leqslant 2 \left| \frac{w^3(x)}{f_1(x)} \right| = \frac{2 \, | w^3(x)|}{\| f_1 \|_{[0,x]}} \\ &\leqslant 2\tilde{K}^{1/\tilde{\theta}} \left[\frac{M_{w^{3\tilde{\theta}}}(x, s)}{M_{f_1}(x, s)} \right]^{1/\tilde{\theta}}. \end{aligned}$$

Nach Hilfssatz 3 bleibt dann $| w^3(x)/f(x)|$ für alle genügend großen x beschränkt, also existiert

$$\max_{x \geqslant 0} | w^3(x)/f(x)|.$$

Außerdem existiert $\max_{x \geqslant r_2} [1/f_1(x)]$, so daß sich aus (18) (unter $\lim_{n\to\infty} E_{2,n}(r) = 0$ mit $r \geqslant r_2$) für $x \in [r_2, r]$ und $n = n_j$ mit $j \geqslant j_0$ ergibt:

$$\left| \frac{f_2(x) - q_{2,n}(x)}{f(x)\, q_n(x)} \right| \leqslant K_2 E_{2,n}(r). \tag{19}$$

Dabei ist $K_2 > 0$ eine Konstante. Schließlich gilt wegen (12) für $x \in [0, r_2]$ und $n \geqslant n^{**}$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_2(x) - q_{2,n}(x)}{f(x)\, q_n(x)} \right| &\leqslant \left| \frac{w(x)(F_2(x) - p_{2,n}(x))}{\hat{f}(x)\, \hat{q}_n(x)} \right| \\ &\quad + \left| \frac{w(x)\, E_{2,n}(r)}{\hat{f}(x)\, \hat{q}_n(x)} \right| \\ &\leqslant 4 \frac{| w(x)|}{| \hat{f}(x)|^2} E_{2,n}(r) \\ &\leqslant K_3 E_{2,n}(r) \end{aligned} \tag{20}$$

mit $K_3 := \max_{x \in [0, r_2]} [4 \, | w(x)|/| \hat{f}(x)|^2]$. Zusammenfassend ergibt sich aus (15), (17), (19), (20) für $n = n_j$ mit $j \geqslant j_0$, falls noch $r \geqslant r_2$ und $\lim_{n\to\infty} E_{2,n}(r) = 0$ ist:

$$\left\| \frac{1}{f} - \frac{1}{q_n} \right\|_{[0,\infty]} \leqslant \max \left\{ \frac{E_{1,n}}{\gamma\bar{\gamma}} + K_4 E_{2,n}(r), \frac{4}{f_1(r)} + 2E_{1,n} \right\} \tag{21}$$

$(K_4 = \max(K_2, K_3))$.

Da f_1 geometrische Konvergenz besitzt, existiert ein $K^* > 0$ und ein $s > 1$ mit

$$E_{1,n} \leq K^*/s^n \qquad \text{für alle genügend großen } n.$$

In (21) ist $E_{2,n}(r)$ die Minimalabweichung zu $F_2 = (f_2 - \tilde{p}_2)/w^3$ bezüglich $\Pi_{n-3\beta}$ über $[0, r]$, also gilt nach einem Satz von Bernstein

$$E_{2,n}(r) \leq \frac{2M_{F_2}(r,s)}{(s-1)\,s^{n-3\beta}}. \tag{22}$$

Nun folgt aber mit Hilfssatz 3 für alle genügend großen r:

$$\begin{aligned} M_{F_2}(r,s) &\leq M_{f_2}(r,s) + M_{\tilde{p}_2}(r,s) \\ &\leq M_{f_2}(r,s) + M_{f_1}(r,s) \\ &\leq 2M_{f_1}(r,s) + M_f(r,s). \end{aligned} \tag{23}$$

Nach Satz 1 gibt es Zahlen $K_5 > 0$, $\theta_1 > 0$ und $r_3 > 0$ mit

$$M_{f_1}(r,s) \leq K_5(\|f_1\|_{[0,r]})^{\theta_1} \qquad \text{für} \quad r \geq r_3. \tag{24}$$

Nach Voraussetzung (4) und (6) gibt es eine Zahl $r_4 > 0$ mit

$$\begin{aligned} \|f\|_{[0,r]} &\leq \|f_1\|_{[0,r]} + \|f_2\|_{[0,r]} \\ &\leq \|f_1\|_{[0,r]} + A(\|f_1\|_{[0,r]})^{\Psi} \\ &\leq (1 + A)(\|f_1\|_{[0,r]})^{\Phi_1} \end{aligned}$$

für $r \geq r_4$. Dabei ist $\Phi_1 := \max(1, \Psi)$. Außerdem gibt es Zahlen $K_6 > 0$, $\theta > 0$ mit

$$M_f(r,s) \leq K_6(\|f\|_{[0,r]})^{\theta}$$

für alle genügend großen r. Wir können also ohne weiteres r_4 so groß wählen, daß

$$M_f(r,s) \leq K_7(\|f_1\|_{[0,r]})^{\Phi_1\theta} \tag{25}$$

für alle $r \geq r_4$ mit einer Konstanten K_7 erfüllt ist. Aus (22)–(25) folgt daher mit einem $K_8 > 0$

$$K_4E_{2,n}(r) \leq K_8\,\frac{(\|f_1\|_{[0,r]})^{\Phi}}{s^n} = K_8\,\frac{(f_1(r))^{\Phi}}{s^n} \tag{26}$$

für alle genügend großen r. Dabei ist $\Phi = \max(\Phi_1\theta, \theta_1)$. Da f_1 für $r \geq r_0$ monoton wächst, können wir $r = r(n)$ so wählen, daß

$$f_1(r) = s^{n/(\Phi+1)}$$

für alle genügend großen n erfüllbar ist. Wegen (26) gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} E_{2,n}(r(n)) = 0$$

und aus (21) ergibt sich für $n = n_j$ für alle genügend großen j:

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{f} - \frac{1}{q_n}\right\|_{[0,\infty]} &\leqslant \max\left\{\frac{K^*}{\gamma\bar{\gamma}}s^{-n} + K_8 s^{(n\Phi/(\Phi+1)-n)}, 2K^*s^{-n} + 4s^{-n/(\Phi+1)}\right\} \\ &\leqslant \max\left\{\frac{K^*}{\gamma\bar{\gamma}}s^{-n} + K_8 s^{-n/(\Phi+1)}, 2K^*s^{-n} + 4s^{-n/(\Phi+1)}\right\} \\ &\leqslant \text{const.}\, s^{-n/(\Phi+1)}.\end{aligned}$$

Beachtet man jetzt noch, daß wegen (5)

$$1 < n_{j+1}/n_j \leqslant \rho$$

erfüllt ist, so folgt damit die geometrische Konvergenz.

BEISPIEL.

$$f(x) = e^{\lambda x} + a \sin x + b \cos x + p(x).$$

Dabei sind $a, b \in \mathbb{R}$, $\lambda \geqslant 1$ und p ein Polynom. Wir können f umformen zu

$$f(x) = e^{\lambda x} + A \cos(x + \Phi) + p(x)$$

mit

$$A = (a^2 + b^2)^{1/2} \qquad \text{und} \qquad 0 \leqslant \Phi < 2\pi.$$

Betrachten wir mit $c > 0$

$$e^{\lambda x} + c\, e^{-\lambda x}$$

und setzen $x_0 := (1/2\lambda) \ln c$, so gilt mit $y = x - x_0$:

$$\begin{aligned} e^{\lambda x} + ce^{-\lambda x} &= e^{\lambda(x_0+y)} + e^{2\lambda x_0}e^{-\lambda(x_0+y)} \\ &= e^{\lambda x_0}(e^{\lambda y} + e^{-\lambda y})\end{aligned}$$

Wählen wir $x_0 := 2k\pi - \Phi$ ($k \in Z$), so ergibt sich für

$$\tilde{f}(y) := f(y + x_0) + ce^{-\lambda(y+x_0)} - p(y + x_0)$$

somit

$$\tilde{f}(y) = e^{\lambda x_0}(e^{\lambda y} + e^{-\lambda y}) + A \cos y.$$

Sind $0 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_L$ die Nullstellen von $f(x)$ mit Ordnungen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_L$ in $[0, \infty)$, so wählen wir k so groß, daß $x_0 = 2k\pi - \Phi > x_L$ ist und $\tilde{f}(y)$ als ganze Funktion nur nichtnegative Koeffizienten hat. Sodann bestimmen wir ein gerades Polynom $p_1(y)$ mit $\text{grad}(p_1) > \text{grad}(p)$, das an den Stellen $y_i = x_i - x_0$ die Funktion $e^{\lambda(x_0 - y)} + p(x_0 - y)$ mit der Ordnung β_i interpoliert und einen positiven Koeffizienten bei der höchsten Potenz hat. Dann hat

$$f^*(y) = \tilde{f}(y) + p(y + x_0) + p(-y + x_0) - p_1(y)$$

als ganze, gerade Funktion in y höchstens endlich viele negative Taylorkoeffizienten. Setzt man $y^2 = z$, so besitzt $F^*(z) := f^*(y)$ nach Satz 2 geometrische Konvergenz über $[0, \infty]$ und damit $f^*(y)$ über $[-\infty, \infty]$. Nun ist

$$f(x) = f^*(x - x_0) - c\, e^{-\lambda x} - p(-x + 2x_0) + p_1(x - x_0),$$

setzen wir also

$$f_1(x) = f^*(x - x_0)$$

und

$$f_2(x) = -c\, e^{-\lambda x} - p(-x + 2x_0) + p_1(x - x_0).$$

dann sind alle Voraussetzungen von Satz 4 für $f = f_1 + f_2$ erfüllt: f besitzt geometrische Konvergenz über $[0, \infty]$.

Insbesondere ist damit die Vermutung von Roulier und Taylor [5] bestätigt, daß $e^x - e^1 \cos x$ geometrische Konvergenz besitzt. Weitere Anwendungsbeispiele von Satz 4 sind in [2] angegeben.

Literatur

1. H.-P. Blatt, "Rationale Tschebyscheff-Approximation über unbeschränkten Intervallen," Habilitationsschrift, Universität Erlangen-Nürnberg, Juni 1974.
2. H.-P. Blatt, Geometric convergence of rational functions to the reciprocal of exponential sums on $[0, \infty]$, *in* "Proceedings of the Conference on the Theory of Approximation, Calgary, 1975."
3. G. Meinardus, A converse theorem in rational approximation, *in* "Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory, Varna, 1970," pp. 217–220.
4. G. Meinardus, A. R. Reddy, G. D. Taylor, und R. S. Varga, Converse theorems and extensions in Chebyshev rational approximation to certain entire functions in $[0, \infty)$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **170** (1972), 171–185.
5. J. A. Roulier und G. D. Taylor, Rational Chebyshev approximation on $[0, \infty)$, *J. Approximation Theory* **11** (1974), 208–215.